



华东师大版

一课一练

高一**数学** (第二学期)



去英国啦!

国内版权输出史上备受关注的图书
引发电视、广播、互联网、报纸等众多媒体深度报道
中国数学教育走向国门的标志事件之一
沪上老牌教辅再次飞跃

37



华东师大版

一课一练

高一数学（第二学期）

本社组编

致亲爱的读者



时光荏苒,岁月匆匆,《华东师大版一课一练》已经诞生了二十几个年头,最初使用《华东师大版一课一练》的高年级学生早已为人父母,也许他们的小孩也正在使用着这套书。《华东师大版一课一练》陪伴着上海一届又一届的学生,从小学到初中,从初中到高中,再延续到他们的下一代继续使用。这是一件多么令人欣慰的事情!

回顾这二十多年来的历程,我们的每一个进步都离不开广大读者的爱护与支持。当然每当我们取得些许成绩,也最想和广大读者分享。2009年,本丛书被中国书业权威评选为“改革开放30年最具影响力的300本书之一”,此次评选中获选的教辅图书只有两种。2015年,本丛书第三次被上海市工商行政管理局评为“上海市著名商标”,这是上海市工商行政管理局颁发给图书类产品唯一的荣誉。

二十多年来我们专注于教学训练的每一个环节,坚持做学术教辅。这是我们不变的坚守,这种坚守根植于每一个华东师大出版社人的心中,自始至终贯彻于每一本书中。本丛书作为同步类辅导材料,编制时坚持做到以下几点:

一、与课时同步。紧扣课本出题,掌握基本知识;变换形式训练,掌握基本方法;进行知识整合,提高学习能力。

二、避免出现超纲和超前内容。每一道题目的选择都有具体的考核意图,作者充分考虑学生已学知识出题。

三、遵循学习规律,及时巩固,克服遗忘。人的大脑对新事物的遗忘遵循艾宾浩斯曲线,只有不断巩固才能将短时记忆转化为长时记忆。

四、紧跟考试和时政实际,编制原创题目,每年都对本丛书做调整和修订。

五、严格审校,内容为王,质量为先,确保优质。

我们不仅关心学生在一段时间内的学习,更关注学生今后长远的发展。考试是衡量学习成果的一种手段,而学习的最终目的却不是为了考试。本丛书以学生的终身发展为目标,不拘泥于考试的形式搞题海战术,而在促使学生在深度掌握知识和方法上下功夫,为以后步入更高级的学段打下良好的基础。

感谢本丛书作者们付出的辛勤劳动,感谢广大读者对我们的信任和支持。我们会一如既往地严格要求自己,不断取得一个又一个进步。



目 录

第四章 幂函数、指数函数和对数函数 (下) / 1

- 4.4(1) 对数概念及其运算 / 1
- 4.4(2) 对数概念及其运算 / 3
- 4.4(3) 对数概念及其运算 / 5
- 4.5(1) 反函数的概念 / 7
- 4.5(2) 反函数的概念 / 9
- 4.6(1) 对数函数的图像与性质 / 11
- 4.6(2) 对数函数的图像与性质 / 13
- 4.6(3) 对数函数的图像与性质 / 15
- 4.7(1) 简单的指数方程 / 17
- 4.7(2) 简单的指数方程 / 19
- 4.8(1) 简单的对数方程 / 21
- 4.8(2) 简单的对数方程 / 23
- 单元测试四 (下) / 25

第五章 三角比 / 29

- 5.1(1) 任意角及其度量 / 29
- 5.1(2) 任意角及其度量 / 31
- 5.2(1) 任意角的三角比 / 33
- 5.2(2) 任意角的三角比 / 35
- 5.3(1) 同角三角比的关系和诱导公式 / 37
- 5.3(2) 同角三角比的关系和诱导公式 / 39
- 5.3(3) 同角三角比的关系和诱导公式 / 41
- 5.3(4) 同角三角比的关系和诱导公式 / 43
- 5.4(1) 两角和与差的余弦、正弦和正切 / 45
- 5.4(2) 两角和与差的余弦、正弦和

正切 / 47

- 5.4(3) 两角和与差的余弦、正弦和正切 / 49
- 5.4(4) 两角和与差的余弦、正弦和正切 / 51
- 5.5(1) 二倍角与半角的正弦、余弦和正切 / 53
- 5.5(2) 二倍角与半角的正弦、余弦和正切 / 55
- 5.5(3) 二倍角与半角的正弦、余弦和正切 / 57
- 5.5(4) 二倍角与半角的正弦、余弦和正切 / 59
- 5.6(1) 正弦定理、余弦定理和解斜三角形 / 61
- 5.6(2) 正弦定理、余弦定理和解斜三角形 / 63
- 5.6(3) 正弦定理、余弦定理和解斜三角形 / 65
- 5.6(4) 正弦定理、余弦定理和解斜三角形 / 67
- 单元测试五 / 69

第六章 三角函数 / 72

- 6.1(1) 正弦函数和余弦函数的图像与性质 / 72
- 6.1(2) 正弦函数和余弦函数的图像与性质 / 74
- 6.1(3) 正弦函数和余弦函数的图像与性质 / 76
- 6.1(4) 正弦函数和余弦函数的图像与性质 / 78
- 6.2(1) 正切函数的图像与性质 / 80



6.2(2)	正切函数的图像与性质 / 82
6.3(1)	$y = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 的图像与性质 / 84
6.3(2)	$y = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 的图像与性质 / 86
6.4(1)	反三角函数 / 88
6.4(2)	反三角函数 / 90
6.5	最简三角方程 / 92
单元测试六 / 94	

期中测试一 / 98

期中测试二 / 102

期末测试一 / 106

期末测试二 / 110

参考答案 / 114

第四章 幂函数、指数函数和对数函数(下)

4.4(1) 对数概念及其运算

1 将下列指数式改为对数式:

(1) $5^a = 125$ _____; (2) $81^{-\frac{3}{4}} = x$ _____;

(3) $a^b = c (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ _____.

2 将下列对数式改为指数式:

(1) $\log_4 \sqrt{8} = \frac{3}{4}$ _____; (2) $\log_{\frac{1}{2}} x = -5$ _____;

(3) $\log_a b = c (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1, b > 0)$ _____.

3 求下列各式中 x 的取值范围:

(1) $\log_2(1-2x)$; (2) $\log_{(x+2)} 5$; (3) $\log_{\frac{x}{2}}(x^2+x)$;

(4) $\lg \frac{x+1}{1-x}$;

(5) $\log_{|5-x|}(x^2-5x+6)$.

4 求下列各式的值:

(1) $\log_{\sqrt{5}} 125$;

(2) $\log_a \frac{1}{a^2} + \log_a \frac{1}{a} (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$;

(3) $\ln e^{10}$;

(4) $\log_{(2+\sqrt{3})}(2-\sqrt{3})$.

- 5 若 $|x - 4y| + (2y - 1)^2 = 0$, 求 $\log_2 \frac{y}{x}$ 的值.
- 6 若 $\log_{(x+1)}(x+1) = 1$ 成立, 求 x 的取值范围.
- 7 已知点 $A(\log_5 1, 5\log_5 \sqrt{5})$ 、 $B(\log_{10} 0.1, \log_3 \sqrt{3})$, 求线段 AB 的长.
- 8 已知 $e^m = 3$, $\ln 2 = n$, 求 e^{2m+3n} 的值.
- 9 某工厂生产某种产品, 如果成本每年都比上一年降低 20%, 那么大约经过多少年可以使成本降低到原来的四成左右?
- 10 已知 $\log_2[\log_3(\log_4 x)] = \log_3[\log_4(\log_2 y)] = \log_4[\log_2(\log_3 z)] = 0$. 求 $x + y + z$ 的值.
- 11 求下列各式中 N 的取值范围:
(1) $\lg N > 0$; (2) $\lg N < 0$; (3) $\lg N > 1$.

4.4(2) 对数概念及其运算

1 计算:

$$(1) \frac{\lg 2 + \frac{2}{3}\lg 4 - \lg \sqrt{2} - \lg 8}{\lg 64 - \lg 16};$$

$$(2) \left(\frac{1}{2}\right)^{-1+\log_{0.5} 7};$$

$$(3) \lg 0.06 + \sqrt{(\lg 6)^2 - 2\lg 6 + 1};$$

$$(4) (\log_6 2)^2 + \log_6 3 \cdot \log_6 12.$$

2 $\log_a x = \frac{1}{2}\log_a m - 2\log_a n - \log_a p$, 则 $x =$ _____.

3 已知 $2\lg \frac{x-y}{2} = \lg x + \lg y$, 求 $\frac{x}{y}$ 的值.

4 已知 $\lg a$ 、 $\lg b$ 是方程 $x^2 + 2x - 4 = 0$ 的两个根, 求 ab 的值.

5 用 $\log_a x$ 、 $\log_a y$ 、 $\log_a z$ 表示 $\log_a \frac{x^2 \sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}$.

6 已知 $\lg(ab) = 5$, $\lg a \cdot \lg b = 6$, 求 a 与 b 的值.

7 已知 $\log_2 x + \log_2 y = 0$, 且 $x^4 + y^4 = 194$, 求 $\log_2(x+y)$ 的值.

8 已知 $a > 0$, 且 $10^x = \lg(10a) + \lg \frac{1}{a}$, 求 x 的值.

9 已知 $\ln x + \ln y = 4$, 求 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值.

10 若 $24^a = 12$. 将下列各式用 a 的代数式表示:

(1) $\log_{24} 2$;

(2) $\log_{24} 3$.

11 通常情况下, 和的对数不等于对数的和, 如 $\lg(x+y) \neq \lg x + \lg y$, 但是否存在实数对 (x, y) , 使 $\lg(x+y) = \lg x + \lg y$ 呢?

4.4(3) 对数概念及其运算

1 计算:

(1) $\log_3 4 \cdot \log_2 49 \cdot \log_7 9$;

(2) $(\log_4 3 + \log_2 9)(\log_9 2 - \log_{27} 8)$;

(3) $\lg 2 \cdot \lg 2500 + 2\lg^2 5$;

(4) $(\log_3 5 + \log_9 0.2)(\log_5 3 + \log_{25} 3)$.

2 化简: $(\log_2 3 + \log_4 9 + \log_8 27 + \cdots + \log_{2^n} 3^n) \cdot \log_2 \sqrt[n]{8}$.

3 若 $\log_a b = \log_b a$ ($a \neq b$, $a \neq 1$, $b \neq 1$), 则 $ab =$ _____.

4 若 $\log_x^2 y + \log_y^2 x = 1$, 则 y 可用 x 表示为 _____.

5 (1) 已知 $\log_3 2 = a$, 把 $\log_2 96$ 写成 a 的代数式;

(2) 已知 $\lg 2 = a$, 把 $\log_2 25$ 写成 a 的代数式.

6 (1) 已知 $\log_{18} 9 = a$, $18^b = 5$, 用 a, b 表示 $\log_6 45$;

(2) 已知 $\log_2 3 = a$, $\log_3 5 = b$, 用 a, b 表示 $\log_{15} 20$;

(3) 已知 $\log_2 a = m$, $\log_5 a = n$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 用 m, n 表示 $\lg a$.

- 7 求值:(1) 设 $3^a = 4^b = 36$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{2b} =$ _____;
- (2) 设 $\log_a(ab) = 5$, 则 $\log_{ab} \sqrt{\frac{b}{a}} =$ _____.
- 8 已知 a, b, c 均大于 1. 若 $\log_a x = 2, \log_b x = 3, \log_{bc} x = 12$, 求 $\log_c x$.
- 9 已知关于 x 的方程 $x^2 - (\log_2 b + \log_a 2)x + \log_a b = 0$ 的两根为 -1 和 2 , 求实数 a, b 的值.
- 10 设直角三角形的斜边为 c , 直角边分别为 a, b , 求证: $\log_{(b+c)} a + \log_{(c-b)} a = 2\log_{(b+c)} a \cdot \log_{(c-b)} a$.
- 11 设 $a > 1, b > 1$, 且 $\log_a b + \log_b a = \frac{5}{2}$, 求 $\frac{a^3 + b^3}{ab + a^2 b^2}$ 的值.
- 12 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a, b, c , 且满足 $8^a = 8^b \cdot 2^c, \log_{2c} b + \log_{2c} (3a - 2c) = 2$. 判断 $\triangle ABC$ 的形状并写出推理过程.
- 13 当 m 在什么范围内变化时, 不等式 $3^{x^2 + 27\log_m 3} > m^3$ 对一切 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立?

4.5(1) 反函数的概念

1 求下列函数的反函数:

(1) $y = \frac{x-3}{3x-1}$;

(2) $y = -x^3 (x \leq 0)$;

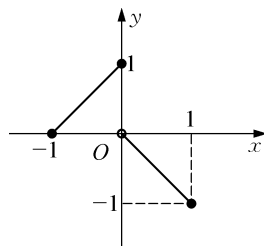
(3) $y = x^{\frac{1}{3}} - 2$;

(4) $y = -\sqrt{x^2-1} (2 < x \leq 3)$;

(5) $y = x^2 - 2x + 3 (x \in [-2, -1])$;

(6) $y = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + 3 (x > 0)$.

2 已知函数 $f(x)$ 的图像如图, 求 $f^{-1}(x)$ 的表达式及图像.



(第 2 题图)

3 函数 $f(x) = \frac{ax+2}{x-1}$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称, 则 $a =$ _____.

4 已知函数 $y = f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x) = 3^x + 1$, 则 $f(10) =$ _____.

5 下列函数中: (1) $y = 1 + \sqrt{x^2+2}$; (2) $y = \frac{1}{x^2-1}$; (3) $y = \sqrt[3]{x-1} + 2$; (4) $y =$

$$\begin{cases} x^2 - 2 (x \geq 0), \\ 2x (x < 0), \end{cases}$$
 存在反函数的函数个数为().

(A) 0 个 (B) 1 个 (C) 2 个 (D) 3 个

6 求函数 $y = \frac{2x}{1+x} (x > -1)$ 图像与其反函数图像的交点.

7 已知 $f(x) = \sqrt{2x-1}$.

- (1) 求它的反函数 $y = f^{-1}(x)$;
- (2) 判断 $f(x)$ 的单调性, 并证明;
- (3) 画出 $f(x)$ 与 $f^{-1}(x)$ 的图像.

8 已知函数 $f(x) = x^2 + 2x + 1$.

- (1) $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有无反函数?
- (2) 若 $f(x)$ 在 $[m, +\infty)$ 上有反函数, 求 m 的取值范围;
- (3) 求 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的反函数.

9 已知函数 $f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 (x > 1)$.

- (1) 求 $f^{-1}(x)$ 的表达式;
- (2) 设 $g(x) = \frac{1}{f^{-1}(x)} + \sqrt{x} + 2$, 求 $g(x)$ 的最小值及相应的 x 的值.

10 已知函数 $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} (c \neq 0, ad \neq bc)$, 当 a, b, c, d 满足什么条件时, $f(x)$ 与其反函数是同一函数?

4.5(2) 反函数的概念

1 求下列函数的反函数:

$$(1) y = \begin{cases} -x-1 & (-1 < x < 0), \\ x+1 & (0 \leq x < 1); \end{cases}$$

$$(2) y = x |x| + 2x;$$

$$(3) y = 2^{-x} + 1 (x > 0);$$

$$(4) y = 2\sqrt{1-x^2} (-1 \leq x \leq 0).$$

2 函数 $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3} (x \leq 1)$ 的反函数的定义域为_____.

3 函数 $f(x) = x^2 - 2ax + 1, (x \in [0, 1] \cup [3, 4])$, 若此函数存在反函数, 则实数 a 的取值范围是_____.

4 若点 $(1, 2)$ 既在函数 $f(x) = \sqrt{ax+b}$ 的图像上, 又在其反函数的图像上, 则 $f(x) =$ _____, $f^{-1}(4) =$ _____.

5 (1) 若直线 $y = ax + 2$ 与直线 $y = 3x + b$ 关于直线 $y = x$ 对称, 求 a, b 的值;

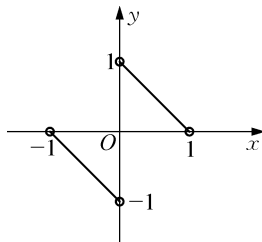
(2) 已知函数 $f(x) = \frac{x-1}{ax-1} (x \in \mathbf{R}, x \neq \frac{1}{a}, a \text{ 为给定的实数})$, 求证: $y = f(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称.

6 如图, $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 0) \cup (0, 1)$, 则不等式 $f^{-1}(x) - f^{-1}(-x) > -1$ 的解集为_____.

7 设函数 $y = f(x)$ 的反函数为 $y = f^{-1}(x)$, $y = f(x+1)$ 的图像过点 $P(-2, 4)$, 则 $y = f^{-1}(x+1)$ 的图像必定过点_____.

8 函数 $f(x) = \frac{a-x}{x-a-1}$ 的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 图像的对称中心是 $(-1, 3)$, 则实数 $a =$ _____.

9 已知函数 $y = f(x)$ 是一次函数, 且 $f(1) = 1, f[f(2)] = 2f^{-1}(4)$, 求 $f(x)$ 的表达式.



(第6题图)

- 10 已知 $y=f(x)$ 为奇函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x)=3^x-1$. 设 $f(x)$ 的反函数是 $y=g(x)$, 求 $g(-8)$ 的值.
- 11 已知函数 $f(x)=a^x+k$ 的图像过点 $(1, 3)$, 它的反函数的图像过点 $(2, 0)$.
(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;
(2) 求 $f(x)$ 的反函数.
- 12 已知 $f(x)=-\sqrt{1-x^2}$ ($x \in D$) 与其反函数是同一函数, 试写出一个满足条件的定义域 D .
- 13 已知: $f(x)=x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}$.
(1) 证明: 函数 $f(x)$ 有反函数, 并求出反函数;
(2) 反函数的图像是否经过点 $(0, 1)$? 反函数的图像与 $y=x$ 有无交点?
(3) 设反函数为 $y=f^{-1}(x)$, 求不等式 $f^{-1}(x) \leq 0$ 的解集.
- 14 在定义域上的单调函数是否一定有反函数? 在定义域上的非单调函数是否一定没有反函数? 试举例说明.

4.6(1) 对数函数的图像与性质

1 求下列函数的定义域:

(1) $y = \log_x(5-x)$;

(2) $y = \sqrt{\lg x} + \lg(5-3x)$;

(3) $y = \sqrt{\log_{0.2}(x+3)-1}$;

(4) $y = \sqrt{\log_{0.1} \frac{3x-2}{2x+1}}$;

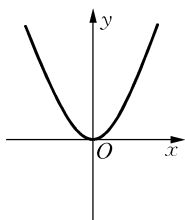
(5) $y = \frac{\sqrt{\log_2 x - 1}}{2x-5}$.

2 求下列函数的反函数:

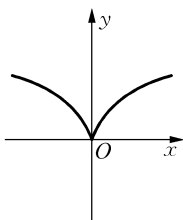
(1) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$;

(2) $y = 2^{-x^2} + 3 (x < 0)$.

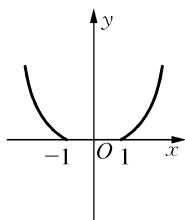
3 函数 $y = \log_a(|x|+1)$, ($a > 1$) 的大致图像是().



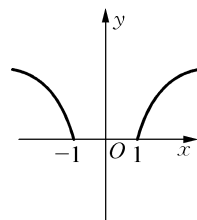
(A)



(B)



(C)



(D)

4 如果 $\log_m 3 < \log_n 3 < 0$, 则 m 与 n 的关系是().

(A) $0 < n < m < 1$

(B) $0 < m < n < 1$

(C) $0 < m < 1 < n$

(D) $1 < m < n$

5 函数 $y = \log_{a^2-1} x$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数, 则 a 的取值范围是_____.

6 根据 $y = \log_2 x$ 的图像, 作出下列函数的图像:

(1) $y = \log_2 |x|$;

(2) $y = |\log_2 x|$;

(3) $y = \log_2 |x-1|$;

(4) $y = |\log_2(x-1)|$.

7 求函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x - 8)$ 的定义域、值域和单调区间.

8 设函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数. 若当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) = \lg x$, 求满足 $f(x) > 0$ 的 x 的取值范围.

9 已知函数 $f(n) = \log_{n+1}(n+2) (n \in \mathbf{N}^*)$, 若 $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot \cdots \cdot f(n) = k (k \in \mathbf{N}^*)$ 成立, 那么称 k 为“对整数”, 则函数 $f(n)$ 在区间 $[1, 100]$ 内的“对整数”共有多少个?

4.6(2) 对数函数的图像与性质

- 1 设 $g(x) = \begin{cases} e^x & (x \leq 0), \\ \ln x & (x > 0), \end{cases}$ 则 $g(g(-\frac{1}{2})) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 2 函数 $f(x) = \log_a(x-k)$ 的图像经过点 $(4, 0)$, 而它的反函数 $f^{-1}(x)$ 的图像经过点 $(1, 7)$, 则 $f(x)$ 是().
(A) 增函数 (B) 减函数
(C) 奇函数 (D) 偶函数
- 3 已知函数 $f(x) = \log_2 x$, 若 $f(x_1) - f(x_2) = 2$, 则 $f(x_1^3) - f(x_2^3) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 4 函数 $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} |x|}$ 的定义域是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- 5 函数 $f(x) = |\log_2 |2x-1| - 1|$ 的单调递增区间为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- 6 若 $f(x) = \log_a(x+1)$ ($a > 0, a \neq 1$) 的定义域和值域都是 $[0, 1]$, 求 a 的值.
- 7 若 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(ax^2 - 2x + 4)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 则 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- 8 已知函数 $y = \log_{0.5}\left(x + \frac{1}{x-1} + 1\right)$ ($x > 1$), 则此函数的值域是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- 9 记函数 $f(x) = \sqrt{2 - \frac{x+3}{x+1}}$ 的定义域为 A , $g(x) = \lg[(x-a-1)(2a-x)]$ ($a < 1$) 的定义域为 B .
(1) 求 A ;
(2) 若 $B \subseteq A$, 求实数 a 的取值范围.

10 求下列函数的定义域与值域以及单调区间:

$$(1) y = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{3 - 2x - x^2};$$

$$(2) y = \frac{1}{\sqrt{1 - \lg x}}.$$

11 已知 x 满足不等式 $\log_{\frac{1}{2}} x^2 \geq \log_{\frac{1}{2}} (3x - 2)$, 求函数 $f(x) = \left(\log_2 \frac{x}{4}\right) \left(\log_2 \frac{x}{2}\right)$ 的最大值和最小值.

4.6(3) 对数函数的图像与性质

- 1 若函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1)$, 则 $F(x) = f[\log_{\frac{1}{2}}(3-x)]$ 的定义域为_____.
- 2 函数 $f(x) = \lg \frac{x\sqrt{2-x^2}}{|x+3|-3}$ 的奇偶性为_____.
- 3 若函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}[kx^2 + (k+2)x + (k+2)]$ 的定义域为 \mathbf{R} , 则实数 k 的取值范围是_____.
- 4 如果函数 $y = \lg(x^2 - ax + 1)$ 的值域为 \mathbf{R} , 那么实数 a 的取值范围是_____.
- 5 函数 $f(x) = a^x + \log_a(x+1)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值与最小值之和为 a , 则 $a =$ _____.
- 6 当 $x \in (1, 2)$ 时, 不等式 $(x-1)^2 < \log_a x$ 恒成立, 则 a 的取值范围是_____.
- 7 已知 $f(x) = \log_a x$ 在 $x \in [2, +\infty)$ 上恒有 $f(x) < -1$, 则 a 的取值范围是_____.
- 8 函数 $f(x) = \lg \frac{1+2^x+4^x \cdot a}{3}$, 若当 $x \in (-\infty, 1]$ 时, $f(x)$ 有意义, 则 a 的取值范围是_____.
- 9 将 $y = 2^x$ 的图像向左平移 1 个单位得到图像 C_1 , 再将图像 C_1 向上平移一个单位得到图像 C_2 , 作图像 C_2 关于直线 $y = x$ 的对称图像 C_3 , 则 C_3 的解析式是().
(A) $y = \log_2(x+1) + 1$
(B) $y = \log_2(x-1) - 1$
(C) $y = \log_2(x-1) + 1$
(D) $y = \log_2(x+1) - 1$
- 10 已知 $0 < a < 1$, x 和 y 满足 $\log_a x + 3\log_x a - \log_a y = 3$. 如果 y 有最大值 $\frac{\sqrt{2}}{4}$, 求此时 a 和 x 的值.

11 已知不等式 $\log_{\frac{1}{2}}^2 x + 3\log_{\frac{1}{2}} x + 2 \leq 0$ 的解集为 M , 当 $x \in M$ 时, 求函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} \frac{x}{2} \cdot \log_4 \frac{x}{8}$ 的值域.

12 已知函数 $f(x) = \log_a(8 - 2^x)$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$).

(1) 若函数 $f(x)$ 的反函数是其本身, 求 a 的值;

(2) 当 $a > 1$ 时, 求函数 $y = f(x) + f(-x)$ 的最大值.

4.7(1) 简单的指数方程

1 解下列方程:

$$(1) 4^{2x-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^x;$$

$$(2) 6^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 2^{x+8};$$

$$(3) \frac{3}{3^x-1} + \frac{1}{3} = 3^{x-1};$$

$$(4) 2^{2+x} - 2^{2-x} = 15;$$

$$(5) 9^x + 6^x = 2^{2x+1}.$$

2 若 x, y 同时满足 $2^{x-6} = 8^{y-1}$ 和 $9^{y+1} = 3^{x-7}$, 则 $x+y$ 的值为_____.

3 方程 $2^x = \frac{1}{2}x + 2$ 的实数解有_____个.

4 已知 $f(x) = \frac{1-2^x}{1+2^x}$, 求 $f^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ 的值.

5 若方程 $a^{-x} = x+a$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 无解, 则 a 的取值范围是_____.

6 一种放射性物质不断变化为其他物质, 每经过一年剩留的物质是原来的 $\frac{4}{5}$, 问经过多少年, 剩留物质是原来的 $\frac{64}{125}$?

7 已知关于 x 的方程 $2 \cdot a^{2x-2} - 7 \cdot a^{x-1} + 3 = 0$ 有一个根是 2, 求 a 的值和方程其余的根.

8 设关于 x 的方程 $k \cdot 9^x - k \cdot 3^{x+1} + 6(k-5) = 0$ 在 $[0, 2]$ 内有解, 求 k 的取值范围.

9 已知关于 x 的方程 $a^x + a^{-x} = 2a$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$).

(1) 当 $a = 2$ 时, 解此方程;

(2) 求证: 在区间 $[-1, 1]$ 内, 方程没有解.

4.7(2) 简单的指数方程

① 解下列方程:

(1) $3 \cdot 4^{x+2} = 4 \cdot 3^{x^2}$;

(2) $\frac{1+3^{-x}}{1+3^x} = 3$;

(3) $2^{2x-3} - 3 \cdot 2^{x-2} + 1 = 0$;

(4) $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2}$;

(5) $4^x + 4^{-x} - 6(2^x + 2^{-x}) + 10 = 0$.

② 设 $f(x) = 2^x$, $g(x) = 4^x$, 且 $f[g(x)] = g[f(x)]$, 则 $x =$ _____.

③ 方程 $6 \cdot 7^{|x|} - 7^{-x} = 1$ 的解集为 _____.

④ 方程 $3^x + 4^x = 5^x$ 的解为 _____.

⑤ 若直线 $y = 2a$ 与函数 $y = |a^x - 1|$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图像有两个公共点, 则 a 的取值范围是 _____.

⑥ 设 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} - a & (x \leq 0), \\ f(x-1) & (x > 0), \end{cases}$ 若 $f(x) = x$ 有且仅有两个实数解, 则实数 a 的取值范围是 _____.